# PROBLEMES DIVERSOS

*Francisco Bellot Rosado*

En aquest capítol es recull un conjunt relativament heterogeni de problemes. Alguns d'ells han estat proposats a les Olimpíades Internacionals (IMO) i podrien encaixar dins d'un grup de "problemes de difícil classificació", bé perquè a la solució hi intervenen tècuiques mixtes, bé perquè, en aparièncía, a la solució no hi ha un substrat teòric suficientment elemental que pugui exposar-se prèviament a estudiants de Batxillerat. D'altres problemes no van ser seleccionats per a la prova de la IMO, encara que tenien, en la meva opinió, mèrits semblants o fins i tot més grans per a haver estat elegits. En algunes ocasions s'inclouen comentaris que, tal vegada, il·lustren el context de l'elecció d'un problema per part d'un Jurat format per 80 persones de diferents països.

Crec que tots tenen un elevat nivell de dificultat; això no ens hauria d'estranyar ja que els problemes de l'Olimpíada Internacional són, en general, molt difícils.

---

El primer exemple és original de Ioan Tomescu, es va publicar (sense solució) a la revista romanesa *Gazeta Matematica* el 1991 i la solució que presentem és d'Álvaro Begué Aguado, medalla de bronze a la IMO de 1993.

**Problema 1.** Es considera un conjunt $M$ de $n$ persones, tal que:

a) Tota persona de $M$ coneix altres $k$ persones de $M$.

b) Tot parell de persones de $M$ que es coneixen, coneixen $h$ persones de $M$.

c) Tot parell de persones de $M$ que no es coneixen, tenen exactament $m$ coneguts comuns a $M$.

Demostreu que $m\,(n-k) - k\,(k-h) + k - m = 0$.

*Solució.* Suposem que si $A$ coneix $B$, llavors $B$ coneix $A$.

Associarem un graf al problema de la manera següent: cada persona és un vèrtex; dos vèrtexs units per una aresta representarà a dues persones que es coneixen. A l'estructura formada per tres vèrtexs units per *dues* arestes l'anomenarem *quasi triangle.* Anem a comptar de dues maneres diferents el nombre de quasi triangles del graf associat al problema.

El nombre de vèrtexs és $n$; el grau de cada vèrtex es $k$; el nombre d'arestes és $nk/2$; i el nombre de *no arestes* és

$$\frac{n(n-1)-nk}{2}=\frac{n(n-k-1)}{2}.$$

El nombre de quasi triangles que contenen una certa aresta és $2(k-h-1)$, de manera que de quasi triangles n'hi haurà

$$\frac{nk(k-h-1)}{2}. \tag{1}$$

D'altra banda, el nombre de parells de punts no units per una aresta és

$$\frac{n(n-k-1)}{2};$$

el nombre de quasi triangles que contenen una certa no aresta es $m$, i per tant hi ha

$$\frac{mn(n-k-1)}{2} \tag{2}$$

quasi triangles.

Escrivint (1) = (2) i fent operacions s'obté precisament la igualtat de l'enunciat.

---

L'exemple següent va ser proposat al Torneig Internacional de les Ciutats de 1986 (diguem de passada, per als alumnes més joves).

**Problema 2.** *(El mite de Sísif)*

Hi ha 1001 graons, amb roques en alguns d'ells (no més d'una a cada graó). Sísif ha d'agafar una roca i pujar-la, un o més graons, fins el primer graó que trobi buit. Aleshores Hades, el seu oponent, agafa una roca i la baixa un graó, sempre que aqnest estigni buit. Inicialment hi ha 500 roques als primers 500 graons. Sísif i Hades mouen les roques alternativament, i Sísif fa el moviment inicial.

Sísif ha de col·locar una roca a l'últim graó. Ho pot impedir Hades?

*Solució (oficial).* Sí, pot impedir-ho. Sempre que Sísif creï una vacant movent una roca, el graó de dalt d'aquesta vacant ha d'estar ocupat. Si no estava ocupat abans, Sísif ha de traslladar allà la seva roca. Per tant, Hades sempre pot omplir aquesta vacant immediatament, baixant la roca del graó superior. Demostrarem que aquesta estratègia basta per a impedir que Sísif aconsegueixi el seu objectiu.

Observem que el primer graó està inicialment ocupat; l'estratègia d'Hades garauteix que sempre estarà ocupat després que Hades mogui. Ademés, inicialment no existeixen dues vacants adjacents per sota de la roca més alta. Per tal que Sísif pugui crear aquestes dues vacants, la inferior ha d'existir prèviament. Però, tan bou punt hagi creat la superior, Hades la ocupa. Per la forma que mou Hades, mai crearà dues vacants adjacents per sota de la roca més alta. Perquè això passi, la vacant superior ha d'existir prèviament, de manera que la roca en el següent graó per sota no hagi estat moguda allà. Si existís una vacant per sota d'aquest graó, no ha estat creada immediatament abans. Per tant Hades no mourà la roca en qüestió. Es dedueix d'això que sempre que sigui el torn de Sísif, el primer graó estarà ocupat i no existeixen dues vacants adjacents per sota de la roca més alta. Per tant, aquesta no pot pujar més enllà del graó 999, així que Sísif no pot situar la roca al 1001.

---

L'exemple següent resultà polèmic: fou proposat el 1992 a la Olimpíada de la Comunitat d'Estats Independents, i el cas particular amb $m = n$ fou proposat per Finlàndia l'auy següent a la IMO d'Estambul, on va ser elegit i es va convertir en el més difícil del primer dia. Ningú no va dir res; el cas es va descobrir al final, perquè la solució havia estat publicada a la revista russa *Kvant*. La sessió del Jurat Internacional de la IMO on es va mostrar la pàgina de *Kvant* amb el problema va ser molt desagradable. Però el problema és molt bonic, i la solució és elemental, de gran brillantor.

**Problema 3.** *(Olimpíada de la Comunitat d'Estats Independents, 1992.)* En un escaquer hi ha fitxes, formant un rectangle de dimensions $m \times n$, $m \geq 2, n \geq 2$. El tauler és infinit, en totes direccions. Només hi ha un tipus de moviment permès: una fitxa salta sobre una altra fitxa situada en una casella contigua, anant a parar a una casella que estigui buida, i es menja la fitxa sobre la que salta. Això es pot fer horitzontalment o verticalment, però no en diagonal.

Quin és el menor nombre de fitxes que pot quedar a l'escaquer?

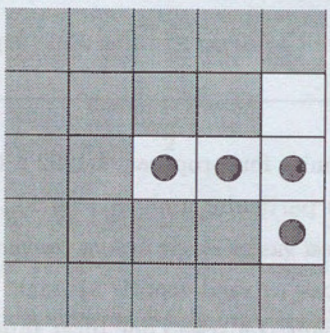
*Solució.* Podem pensar en els casos que $m$ i $n$ no són excessivament grans, ja que sempre serà més fàcil que si comencem amb un rectangle $1537 \times 2000 \dots$

Si el rectangle té dimensions $2 \times 1$, l'anàlisi acaba aviat: només queda una fitxa al tauler. Si és $3 \times 1$, queden dues fitxes, ja que inicialment solament es pot moure la central, menjant-se una de les altres dues, i les que queden després estan massa separades per a continuar el joc.

El cas $2 \times 2$ es redueix fàcilment al $2 \times 1$ (queda una fitxa), i el $3 \times 2$ es redueix al $3 \times 1$ (queden dues fitxes).

De seguida es comprèn que l'estratègia que utilitzem en casos més complexos ha de ser tal que mantingui les fitxes el més agrupades possible. La seqüència de moviments que veurem a continuació ens permetrà, no solament això, sinó també eliminar files completes de les fitxes del rectangle.

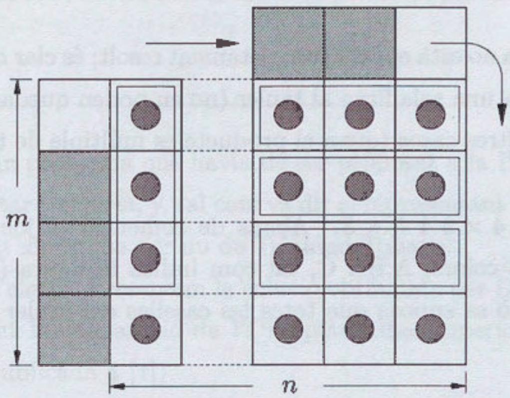
Si en alguna part del rectangle hi ha quatre fitxes en la posició de la figura



es fàcil trobar una sèrie de moviments permesos per mitjà dels quals s'eliminen les tres fitxes horitzontals i la quarta es queda, al final, en la mateixa posició que té al principi. (Els alumnes troben aquesta sèrie de seguida).

Veurem a continuació com eliminar files completes de tres en tres, utilitzant aquest procediment. Considerem el rectangle $m \times n$, representat a la figura (hi ha punts suspensius per a indicar les columnes intermèdies)

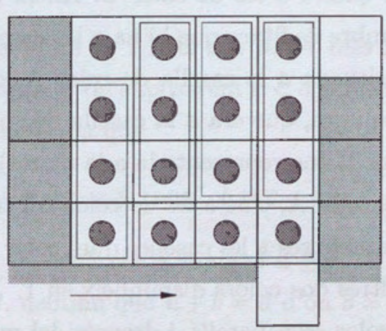
Començant per la columna de l'esquerra, auem eliminant grups de tres fitxes, en columna, d'esquerra a dreta, fins que quedin les tres últimes columnes de la dreta; i les últimes 9 fitxes s'eliminen en grups de tres fitxes horitzontals, de dalt a baix.



Així podem eliminar les tres files completes, passant, per tant, d'un rectangle $m \times n$ a un rectangle $(m-3) \times n$.

Naturalment, el que hem dit arran de les files ho podríem repetir per a les columnes. Això significa que per mitjà del procediment anterior bastarà considerar només valors petits de $m$ i $n$.

A més a més dels que ja hem vist al principi, és instructiu veure com en el cas $4 \times 4$ es pot aconseguir que quedi una úuica fitxa al tauler; la següent figura mostra com fer-ho:



Deixarem la fitxa de la cantonada superior esquerra, eliminant les altres així: primer les tres fitxes que té per sota (en vertical); després les tres fitxes horitzoutals de la fila inferior; i després, de dreta a esquerra, les que estan en grups de tres, verticals.

En aquest punt, ens podem preguntar, quan quedaran dues fitxes i quan en quedarà només una. Com que les files (o columnes) del rectangle es van eliminant de tres en tres, la resposta del problema sembla ser

DUES, si el producte $mn$ es múltiple de tres; UNA, en cas contrari

No obstant, el problema no està encara completament resolt; és clar que la nostra estratègia funciona bé quan queda una sola fitxa al tauler (no en poden quedar menys); però hem de demostrar que en els altres casos (quan el producte es múltiple de tres), no poden quedar menys de dues fitxes.

Analitzarem els casos $4 \times 3$ i $5 \times 3$. Abans de començar el joc, acolorim les caselles de l'escaquer amb tres colors, A,B i C, tal com indica la figura (que només representa el rectangle $4 \times 3$, però se suposa que totes les caselles del tauler estan acolorides de la mateixa manera):

| | | | |
|---|---|---|---|
| **A** | **B** | **C** | **A** |
| **B** | **C** | **A** | **B** |
| **C** | **A** | **B** | **C** |

Com es pot observar, les caselles del mateix color estan en diagonals. Posem ara les fitxes al rectangle $4 \times 3$. Abans de començar a jugar, hi ha quatre fitxes a les caselles de color A, quatre a les de color B i quatre a les de color C. Auem a veure quin és l'efecte del moviment del joc sobre el nombre de fitxes que hi ha a les caselles de cada color. Per fixar idees, suposem que la fitxa situada a la casella de color A, del vèrtex superior dret, és menjada per la de la seva esquerra, que era a la casella de color C, i que en saltar sobre ella ocupa una casella de color B (no representada a la figura). Fent aquest moviment, hi ha tres fitxes a les caselles de color A, cinc a les de color B i tres a les de color C.

En altres paraules, el nombre de fitxes a les caselles d'un color augmenta en 1, i el nombre de fitxes a les caselles dels altres dos colors disminueix en 1. Inicialment, els nombres de fitxes a les caselles de cada color eren *parells*, i després del moviment del joc són *senars.* Si el rectangle fos $5 \times 3$, la situació s'invertiria: abans de jugar, el nombre de fitxes a les caselles de cada color és *senar*, i després del moviment del joc, és *parell.*

Aquesta situació pot expressar-se dient que, en aquest joc, és *invariant* la igualtat de les paritats del nombre de fitxes que hi ha a les caselles de cada color.

Doncs bé, això és suficient per a garantir que, en el cas que ens ocupa ($mn$ es múltiple de 3), *no poden quedar menys de dues fitxes.* Perquè si passés això, quedaria una sola fitxa al tauler, és a dir, cap fitxa a les caselles de dos dels colors, i una a la casella del tercer color. Però els nombres 0, 1, 0 no tenen la mateixa paritat, i per tant és impossible arribar a aquesta situació.

---

El quart exemple és un problema que havia de ser proposat a la IMO de 1991, a Sigtuna (Suècia). El va presentar Bulgària, y, tal com va dir el representant del Brasil, és igualment difícil per un estudiant xinès que per un de Trinidad-Tobago.
Malgrat tot, no va ser elegit. Presentem la solució obtinguda per Daniel Lasaosa Medarde l'estiu de 1991, durant la preparació de l'Olimpíada Iberoamericana d'aquell any. (La solució oficial figura publicada a [1]).

**Problema 4.** Dos estudiants, $A$ i $B$, juguen de la següent manera: cada un d'ells escriu en un paper un nombre enter positiu i el dóna a l'àrbitre. Aquest, escriu a la pissarra dos enters, un dels quals és la suma dels nombres escrits pels dos jugadors. L'àrbitre pregunta a l'estudiant $A$: *Pots saber el nombre escrit per l'altre jugador?*. Si $A$ contesta "No", l'àrbitre fa la mateixa pregunta al jugador $B$. Si B contesta "No", torna a fer-li la pregunta a $A$, etc.
Se suposa que $A$ i $B$ són intel·ligents i diuen la veritat.
Demostreu que, en un nombre finit d'etapes, algun dels estudiants contesta "Sí".

*Solució.* $A$ coneix el seu nombre $a$, i B el seu $b$. A més a més, tots dos coneixen els nombres donats per l'àrbitre ($c, d$ on suposarem $c < d$). Podem menysprear el cas $c = d$, ja que guanyaria directament $A$, ja que

$$b + a = c = d \implies b = c - a = d - a.$$

• $A$ només pot estar segur de conèixer la suma si $a \geq c$; en aquest cas, $a + b > c$, i com que $a + b = c$ o $a + b = d$, deduïm que $a + b = d$ d'on $b = d - a$.

• En el cas que $A$ no conegui la suma, $B$ sap que $c > a$ (si no, $A$ hauria guanyat). Per tant $a + b < c + b$; si $d \geq c + b$, $d > a + b$, d'on $a + b = c$, $a = c - b$ i guanyaria $B$.

• Si $B$ no guanya, $A$ ja sap que $c + b > d$, per tant $b > d - c$; $a + b > a + d - c$; si $a + d - c \geq c$, $A$ guanya ja que $a + b > c$, $a + b = d$. Si no, $B$ ja sap que $a + d - c < c$, $a < 2c - d$, $a + b < 2c - d + b = c + b - (d - c)$; si $d \geq c + b - (d - c)$, $a + b < d, a + b = c$ i $B$ guanya, etc.

Les fites obtingudes per $A$ han estat $a \geq c$, $a \geq 2c - d = c - (d - c)$.

Les obtingudes per $B$ han estat $d-c \geq b, 2(d-c) \geq b$.

Vegem que les fites de $A$ són de la forma $a \geq c - n(d-c)$ i les de $B$, $n(d-c) \geq b$.

Sigui $K$ una fita de $A$, $a \geq K$. Si $A$ no encerta, $B$ sap que $a < K$, d'on $a+b < K+b$; si $d \geq K+b$, llavors $a+b < d$ i $B$ guanya. Si no, $A$ sap que $K+b > d$, $b > d-K$, $a+b > d-K+a$; si $d-K+a \geq c$, $a+b > c$, i $A$ guanya. La nova fita ha estat

$$a \geq K + c - d = K - (d-c).$$

Això val per a tot $K$, de manera que les successives fites de $A$ són

$$c,\ c-(d-c),\ c-2(d-c),\ \ldots c-n(d-c).$$

El mateix tipus de raonament permet obtenir les fites de $B$

$$d-c,\ 2(d-c),\ 3(d-c), \ldots$$

De $a \geq c-n(d-c)$ obtenim $n \geq \frac{c-a}{d-c}$; aleshores si prenem $n = \left[\frac{c-a}{d-c}\right] + 1$ segur que es complirà l'anterior desigualtat; per tant si $A$ o $B$ no han guanyat abans, $A$ guanya ara; és en el torn $\left(\left[\frac{c-a}{d-c}\right]+1\right)$-èsim de $A$.

Finalment, observem que en guanyar, $A$ descobreix que $a+b=d$. Si guanya $B$, descobreix que $a+b=c$. Per tant, si l'àrbitre elegeix el segon nombre més gran que la suma, guanya $B$; i si no, guanya $A$.

---

El següent exemple fou presentat per Bulgària en la IMO de 1985, però no resultà elegit. És un cas lleugerament més general d'altres problemes similars.

**Problema 5.** Siguin $a$ i $b$ nombres enters, i $n$ un enter positiu. Demostreu que

$$\frac{b^{n-1}a(a+b)(a+2b)\cdots(a+(n-1)b)}{n!}$$

és un nombre enter.

*Solució (oficial).* És ben conegut que si $p < n$ es primer, l'expouent més gran $\alpha$ tal que $p^\alpha$ divideix $n!$ és

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots$$

Aquesta suma (finita, ja que si $p^x > n$ els sumands són nuls) és menor o igual que

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \left[\frac{n}{2^3}\right] + \cdots$$

i aquesta suma és menor o igual que $n$. Per tant, ha de ser

$$n - 1 \geq \alpha.$$

Si $p$ divideix $b$, aleshores es pot simplificar $p$ del quocient. Si $p$ no divideix $b$, aleshores ha de dividir un dels factors

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ \ldots,\ a+(p-1)b.$$

En total hi haurà al menys $[n/p]$ factors divisibles per $p$. De la mateixa manera, hi haurà al menys $[n/p^2]$ factors divisibles per $p^2$, i així successivament. En total, el producte

$$a(a+b)(a+2b)\cdots\big(a+(n-1)b\big)$$

té $p$ com a factor al menys $\alpha$ vegades, i hem acabat.

---

Els dos exemples següents són d'equacions funcionals. El primer va ser, probablement, un dels més difícils de l'Olimpíada de 1996 de Bombay. No s'havia proposat mai en la IMO una equació funcional amb domini en els enters que admetés a més de les solucions trivials, una família infinita de solucions, gens fàcil de construir.

**Problema 6.** *(Proposat per Romania.)* Sobre el conjunt dels enters més grans o iguals que zero, es demana que determineu totes les funcions $f$ d'aquest conjunt en ell mateix, tals que

$$f\big(m + f(n)\big) = f\big(f(m)\big) + f(n),$$

qualssevol que siguin els elements $m, n$ de l'esmentat conjunt. (Problema original de Mircea Becheanu).

*Solució (de l'autor).* Designem per $\mathbb{N}$ el conjunt dels enters més grans o iguals que zero. En primer lloc provem alguns valors particulars de les variables:
Si $m = n = 0$, aleshores $f(0) = 0$.
Si $m = 0$, aleshores $f\big(f(n)\big) = f(n)$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ (*).

Per tant, passant aquest resultat a l'equació funcional, aquesta es pot escriure en la forma

$$f\big(m+f(n)\big)=f(m)+f(n), \quad \forall m,n\in\mathbb{N}.$$

La funció nul·la és una solució de l'equació. Suposem que $f$ no és la funció nul·la. Aleshores té punts fixos no nuls, ja que es compleix (*). Sigui $P\subset\mathbb{N}$ el conjunt dels punts fixos no nuls de la funció. És evident que $P\cup\{0\}=f(\mathbb{N})$. Signi $a$ el menor punt fix no nul. Si $a=1$, aleshores $f(2)=2$ i es comprova per inducció que $f(n)=n$, qualsevol que sigui $n$. Suposem ara que $a>1$. Per inducció es demostra que $f(ka)=ka$, $\forall k\geq 1$. D'aquí surt que

$$a\mathbb{N}\subset P\cup\{0\}.$$

Anem a demostrar que $a\mathbb{N}=P\cup\{0\}$. Observem primer que la suma de dos punts fixos es un punt fix. Sigui $b$ un punt fix arbitrari. D'acord amb la divisió entera

$$b=aq+r, \quad 0\leq r<a.$$

tenim

$$b=f(b)=f(aq+r)=f\big(r+f(aq)\big)=f(r)+f(aq)=f(r)+aq.$$

Resulta que $f(r)=r$, i per tal que $r<a$, ha de ser $r=0$. En conclusió, $f(\mathbb{N})=a\mathbb{N}=P\cup\{0\}$.

En particular, per a tot $i$, $0\leq i\leq a-1$, es té

$$f(i)=a\,n_i, \text{ amb } n_i\in\mathbb{N} \text{ i } n_0=0.$$

Sigui ara $n\in\mathbb{N}$ arbitrari. Dividint per $a$,

$$n=ka+i, \quad 0\leq i<a.$$

Resulta aleshores qne

$$f(n)=f(i+ka)=f\big(i+f(ka)\big)=f(i)+ka=n_ia+ka=\left(\left[\frac{n}{a}\right]+n_i\right)a.$$

Comprovem que aquestes funcions compleixen l'equació funcional. Siguin $m=ka+i$, $n=ha+j$, $0\leq i,j<a$. Llavors

$$\begin{aligned} f\big(m+f(n)\big)&=f\big(ka+i+f(ha+j)\big)=f\big(ka+i+(h+n_j)a\big)\\ &=f(k+h+n_j)a+i=(k+h+n_j+n_i)a\\ &=(k+n_i)a+(h+n_j)a=f(m)+f(n). \end{aligned}$$

Per tant, si $f$ no és la funció nul·la, té la forma general següent:

Sigui $a \in \mathbb{N}$ i $n_0, n_1, \ldots, n_{a-1}$, nombres naturals arbitraris, amb $n_0 = 0$. Aleshores

$$f(n) = \left(\left[\frac{n}{a}\right] + n_i\right) a,$$

on $i$ es el residu de la divisió de $n$ per $a$.

La funció identitat és d'aquesta forma, amb $a = 1$.

---

L'exemple següent va ser el problema 6 de la IMO de 1998 a Taiwan. La revista francesa *Quadrature*, núm. 34, Oct-Nov-Des. 98, pàgs. 47-48, va publicar una anàlisi excel·lent d'aquest problema, a càrrec de Roger Cuculière. S'hi descobreix, entre d'altres coses, que la funció completament multiplicativa i involutiva s'ha utilitzat en tres ocasions a les IMO: el 1983 (Problema 1), el 1994 (Problema 5) i el 1998 (Problema 6). I, curiosament, si mirem la solució del problema de 1983, inevitablement ens recorda la solució de l'exemple precedent ...

També és molt instructiu l'anàlisi que del problema de 1994 fan J.P.Boudine, F.Lo Jacomo, i R.Cuculière a l'excel·lent publicació francesa *Olympiades Internationales de Mathématiques: enoncés et solutions detaillées (1988-1997)*, Editions du Choix, 1998.

**Problema 7.** Determineu el menor valor possible de $f(1998)$, si $f$ és una funció del conjunt $\mathbb{N}$ dels enters positius en ell mateix, tal que, per a tots els $m, n \in \mathbb{N}$,

$$f\big(n^2 f(m)\big) = m\big(f(n)\big)^2.$$

*Solució (oficial).* Anomenem $S$ al conjunt de funcions considerades, sigui $f$ una qualsevol d'elles, i posem $f(1) = a$.

Fent separadament $n = 1$, $m = 1$, obtenim

$$f\big(f(m)\big) = a^2 m; \qquad f\big(an^2\big) = \Big[f(n)\Big]^2 \quad \text{per a tot } m, n \in \mathbb{N}.$$

Aquestes relacions, junt amb l'equació funcional original, donen

$$\begin{aligned}\big[f(m)f(n)\big]^2 &= \big[f(m)\big]^2 f(an^2) = f\Big(m^2 f\big(f(an^2)\big)\Big) = \\ &= f(m^2a^2an^2) = f\Big(a(amn)^2\Big) \\ &= \big[f(amn)\big]^2.\end{aligned}$$

En deduïm que $f(amn) = f(m)f(n)$, qualssevol que siguin $m, n$; en particular, $f(am) = af(m)$, i aleshores

(1) $$af(mn) = f(m)f(n) \quad \text{per a tots els } m, n \in \mathbb{N}.$$

Ara provarem que $f(n)$ és divisible per $a$ per a cada $n \in \mathbb{N}$.
Per un cert primer donat $p$, siguin $p^\alpha$, $p^\beta$ les potències més grans de $p$ que divideixen, respectivament, $a$ i $f(n)$. Per inducció, i utilitzant (1), es demostra que

$$[f(n)]^k = a^{k-1} f(n^k) \text{ per a tot } k \in \mathbb{N}.$$

La potèucia més gran de $p$ que divideix $[f(n)]^k$ és $p^{k\beta}$; la potència més gran de $p$ que divideix $a^{k-1}$ és $p^{(k-1)\alpha}$. Per tant,

$$k\beta \geq (k-1)\alpha \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

que només és possible si $\beta \geq \alpha$. La conclusió es compleix per a qualsevol primer $p$, de manera que $a$ divideix $f(n)$. Per tant, podem posar $g(n) = f(n)/a$, i obtenim una nova funció $g$ de $\mathbb{N}$ en ell mateix. Els resultats provats abans demostren que

(2) $$g(a) = a, \; g(mn) = g(m)g(n), \; g(g(m)) = m$$

qualssevol que siguin $m, n \in \mathbb{N}$. En efecte, $g(mn) = g(m)g(n)$ és equivalent a (1), i la propietat involutiva $g(g(m)) = m$ es dedueix de

$$ag(g(m)) = g(a)g(g(m)) = g(ag(m)) = g(f(m)) = \\ = \frac{f(f(m))}{a} = \frac{a^2 m}{a} = am.$$

Es fàcil (?) deduir de (2) que

$$g(n^2 g(m)) = g(n^2) g(g(m)) = m[g(n)]^2 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Per tant, $g$ es també una funció de $S$ i els seus valors no excedeixen dels corresponents de $f$. Així podem limitar l'atenció a les funcions $g$ que compleixen (2). El fet essencial és que cada funció d'aquest tipus transforma primers en primers.
En efecte, sigui $p$ un primer, i posem $g(p) = uv$ per certs enters positius $u, v$. Per (2),

$$p = g(g(p)) = g(uv) = g(u)g(v),$$

d'on, un d'aquests factors, diguem $g(u)$, ha de ser ser 1. Llavors $u = g\big(g(u)\big) = g(1) = 1$, de manera que $g(p)$ es primer.

Per tal de determinar el mínim valor buscat, sigui $g$ qualsevol funció que satisfaci (2). Es injectiva, perquè

$$g(m) = g(n) \Longrightarrow m = g\big(g(m)\big) = g\big(g(n)\big) = n,$$

així que transforma primers diferents en primers diferents. Per tant una fita inferior per

$$g(1998) = g\big(2 \cdot 3^3 \cdot 37\big) = g(2)\big[g(3)\big]^3 g(37)$$

s'obté quan $g(2), g(3), g(37)$ són els tres primers més petits, $2, 3, 5$, amb $g(3) = 2$. Això dóna $g(1998) \geq 3 \cdot 2^3 \cdot 5 = 120$ per a cada funció $g \in S$.

Vegem, finalment, que hi ha una funció a $S$ que abasta aquesta fita: Posem $g(1) = 1$, i definim $g$ sobre els nombres primers de la següent manera:

$$g(2) = 3,\ g(3) = 2,\ g(5) = 37,\ g(37) = 5;$$

$$g(p) = p \text{ per als altres primers}$$

La definició s'estén aleshores a qualsevol nombre

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} \in \mathbb{N}$$

posant

$$g(n) = g(p_1)^{\alpha_1} g(p_2)^{\alpha_2} \ldots g(p_k)^{\alpha_k}.$$

Les condicions (2) es compleixen (amb $a = 1$), i per tant $g \in S$. Clarament, $g(1998) = 120$, i hem acabat.

---

Com a pont cap a la Geometria veurem ara un exemple d'un problema proposat al Canadà a la IMO de 1995 per la República Txeca. (Seria imperdonable que no posés problemes de geometria en una selecció com aquesta.)

**Problema 8.** Determineu tots els enters $n > 3$ per als quals existeixen $n$ punts $A_1$, $A_2$, $\ldots$, $A_n$ en el pla, i nombres reals $r_1$, $r_2$, $\ldots$, $r_n$ que compleixen les següents condicions:

1) Entre els punts $A_1, \ldots, A_n$ no n'hi ha tres que estiguin alineats;

2) Per a cada terna $i, j, k$, $(1 \leq i < j < k \leq n)$, el triangle $A_iA_jA_k$ té àrea igual a $r_i + r_j + r_k$.

*Solució.*

Notació: Designarem l'àrea del triangle $A_iA_jA_k$ per

$$[ijk] = [A_iA_jA_k],$$

i anàlogament per a d'altres polígons.

Vegem que el problema té solució per a $n = 4$; basta considerar el quadrat unitat $A_1A_2A_3A_4$, prenent $r_i = 1/6$ per a tot $i$, $1 \leq i \leq 4$.

Més generalment, per quatre punts qualssevol sempre es poden trobar $r_i$ convenients, per tal com el sistema d'equacions

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = a \\ r_2 + r_3 + r_4 = b \\ r_1 + r_3 + r_4 = c \\ r_1 + r_2 + r_4 = d \end{cases}$$

sempre té solució única:

$$r_1 = \frac{a - 2b + c + d}{3}$$

$$r_2 = \frac{a + b - 2c + d}{3}$$

$$r_3 = \frac{a + b + c - 2d}{3}$$

$$r_4 = \frac{-2a + b + c + d}{3}.$$

(Això es més del que demanava el problema; un altre exemple per $n = 4$ s'obté agafant com a $A_4$ el centre de gravetat del triangle $A_1A_2A_3$ i elegint $r_1 = r_2 = r_3 = -r_4 = 1/3$).)

Demostrarem que no hi ha solució per a $n = 5$ la qual cosa implicarà que ja no n'hi ha per a $n \geq 5$.

Comencem amb les següents observacions:

*Observació 1.* Si $A_iA_jA_kA_h$ es un quadrilàter convex, aleshores

$$r_i + r_k = r_j + r_h.$$

La demostració surt d'observar

$$[ijk] + [khi] = [A_iA_jA_kA_h] = [jkh] + [hij]\text{, és a dir}$$

$$2r_i + r_j + 2r_k + r_h = r_i + 2r_j + r_k + 2r_h.$$

*Observació 2.* Els nombres $r_i$ han de ser tots diferents.

En efecte, suposem per exemple que $r_4 = r_5$. Al menys dos dels punts $A_1, A_2, A_3$ estaran al mateix costat de la recta $A_4A_5$; suposem que són $A_1$ i $A_2$. Ja que $r_4 = r_5$, ha de ser ser $[124] = [125]$, cosa que implica que $A_4A_5$ es paral·lela a $A_1A_2$. Hi ha dos casos a considerar:

a) $A_3$ és al mateix costat de $A_4A_5$ que $A_1$ i $A_2$.

El mateix argument d'abans ens diu que $A_2A_3$ es paral·lel a $A_4A_5$. Però aleshores $A_2A_3$ es paral·lel a $A_1A_2$, cosa que és impossible perquè $A_1, A_2$ i $A_3$ no estan alineats.

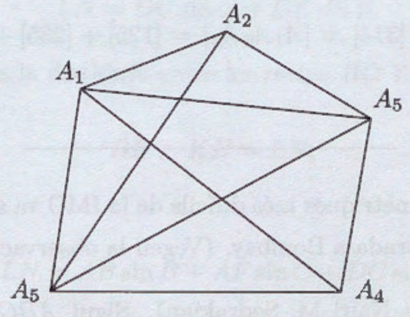
b) $A_3$ és al costat oposat de $A_1$ i $A_2$ respecte de $A_4A_5$.

Llavors, com que $A_1A_2$ és paral·lel a $A_4A_5$, tenim que $[145] = [245]$, i $r_1 = r_2$. Tornem a començar la demostració amb els subíndexs 4 i 5 en lloc de 1 i 2. Aquesta vegada sabem que s'aplicarà el cas a), ja que els punts $A_3, A_4$ i $A_5$ estan al mateix costat de $A_1A_2$.

Així doncs, tots els $r_i$ han de ser diferents.

Tornem al problema principal. Considerem l'envolvent convexa dels 5 puuts $A_i$. Poden presentar-se tres situacions:

I) L'envolvent convexa es un pentàgon $A_1, \ldots, A_5$.

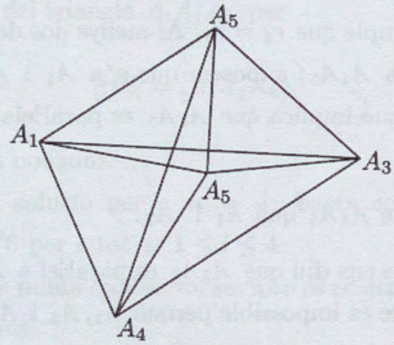



Els quadrilàters $A_1A_2A_3A_4$ i $A_1A_2A_3A_5$ són convexos; per l'observació 1 tenim

$$r_1 + r_3 = r_2 + r_4 \text{ i } r_1 + r_3 = r_2 + r_5$$

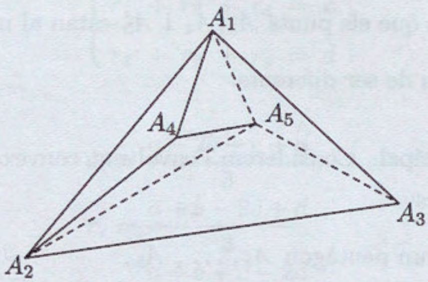
i per tant ha de ser $r_4 = r_5$, impossible per l'observació 2.

II) L'envolvent convexa és un quadrilàter $A_1A_2A_3A_4$.




Podem suposar que $A_5$ és a l'interior de $A_3A_4A_1$. Aleshores $A_1A_2A_3A_5$ és un quadrilàter convex i es té la mateixa contradicció d'abans.

III) L'envolvent convexa és un triangle $A_1A_2A_3$.




A causa de $[124] + [234] + [314] = [A_1A_2A_3] = [125] + [235] + [315]$, tenim $r_4 = r_5$, en contra de l'observació 2.

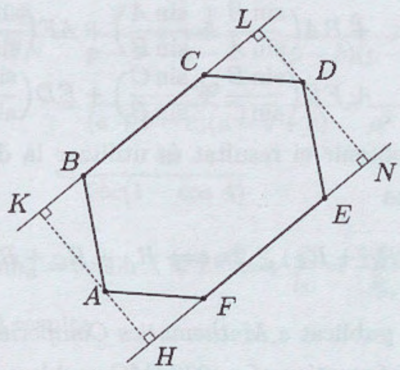
---

Una de les desigualtats geomètriques més difícils de la IMO va ser proposada per Armènia a l'Olimpíada de 1996 celebrada a Bombay. (Vegeu la observació 2 del final).

**Problema 9.** (Original de Nairi M. Sedrakian). Sigui $ABCDEF$ un hexàgon convex tal que $AB$ és paral·lel a $ED$, $BC$ és paral·lel a $FE$ i $CD$ és paral·lel a $AF$. Siguin $R_A, R_C, R_E$ els radis de les circumferències circumscrites als triangles $FAB$, $BCD$ i $DEF$, respectivament; i sigui $p$ el perímetre de l'hexàgon. Demostreu que

$$R_A + R_E + R_C \geq \frac{p}{2}.$$

*Solució (oficial).* Siguin $a, b, c, d, e, f$ les longituds de $AB$, $BC$, $CD$, $DE$, $EF$ i $FA$, respectivament. Observeu que els angles oposats del hexàgon són iguals $\widehat{A} = \widehat{D}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$, $\widehat{C} = \widehat{F}$). Des de $A$ i $D$ es tracen perpendiculars a les rectes $BC$ i $EF$ (vegeu la figura)




Es compleixen les relacions

$$KH = AB \sin B + AF \sin F$$
$$LN = DC \sin C + DE \sin E$$

que, mitjançant la igualtat d'angles oposats a l'hexàgon, es converteixen en

$$KH = AB \sin B + AF \sin C$$
$$LN = DC \sin C + DE \sin B.$$

La distància $KH = LN$ és la distància entre les rectes $BC$ i $EF$, i per tant

$$BF \geq KH = LN,$$

d'on

$$2BF \geq KH + LN = AB \sin B + AF \sin C + DC \sin C + DE \sin B.$$

El teorema dels sinus aplicat a $ABF$ dóna $BF = 2R_A \sin A$, d'on surt

$$4R_A \sin A = 2BF \geq AB \sin B + AF \sin C + DC \sin C + DE \sin B$$

i, anàlogament

$$4R_C \sin C = 2BD \geq FA \sin A + FE \sin B + CB \sin B + CD \sin A$$

$$4R_E \sin B = 2DF \geq BC \sin C + BA \sin A + ED \sin A + EF \sin C$$

Dividint aquestes desigualtats respectivament per $\sin A$ ,$\sin B$, $\sin C$ i sumant, s'obté

$$\begin{aligned}4(R_A+R_C+R_E) \geq DC\Big(\frac{\sin C}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin C}\Big)+CB\Big(\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}\Big)+\\ +BA\Big(\frac{\sin B}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin B}\Big)+AF\Big(\frac{\sin C}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin C}\Big)+\\ +FE\Big(\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}\Big)+ED\Big(\frac{\sin B}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin B}\Big),\end{aligned}$$

i ja l'únic que falta per a obtenir el resultat és utilitzar la desigualtat (ben coneguda) $x/y+y/x \geq 2$, ja que resulta

$$4(R_A+R_C+R_E) \geq 2p \Longleftrightarrow R_A+R_C+R_E \geq \frac{p}{2}.$$

*Observació 1.* Sedrakian ha publicat a *Mathematics Competitions*, vol. 9, núm. 2, 1996, un article titulat *The Story of creation of a 1996 IMO problem*, en el qual explica el procés d'obtenció del problema.

*Observació 2.* Aquest problema va ser el més difícil de la IMO de Bombay; només el van resoldre 6 concursants: dos romanesos i 4 armenis (!!!). Els sis concursant xinesos hi van obtenir zero punts.

---

En una ocasió, un problema proposat per Espanya va estar a prop de resultar elegit a la IMO. Va ser el 1993; el comitè seleccionador de problemes l'havia senyalat amb ***** (molt difícil) i amb !! (altament recomanat), ja que no s'havia pogut trobar cap solució diferent de la proposada bastant llarga, per cert; com que és meva, ningú no s'ofendrà per aquest comentari). Però el Cap de la Delegació d'Holanda, Johannes Notemboom, va trobar la següent, molt més curta i elegant.

**Problema 10.** Al triangle $ABC$, siguiu $D$, $E$ punts del costat $BC$ tals que $\widehat{BAD}=\widehat{CAE}$. Si $M$, $N$ són, respectivament, els punts de tangència amb $BC$ dels cercles inscrits a $ABD$ i $ACE$, proveu que

$$\frac{1}{MB}+\frac{1}{MD}=\frac{1}{NC}+\frac{1}{NE}.$$

*Solució.* Reformularem el problema en els següents termes: Donat el triangle $ABC$, amb $\widehat{A}$ constant i $h_a$ constant, si el cercle inscrit es tangent a $BC$ a $M$, demostreu que

$$\frac{1}{BM}+\frac{1}{CM}$$

es constant.

En efecte, si indiquem per $p$ el semiperímetre del triangle $ABC$, tenim les igualtats

$$\begin{aligned} \frac{1}{BM}+\frac{1}{CN} &= \frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}=\frac{a}{(p-b)(p-c)} \\ (*) \qquad &= \frac{4a}{(a+b-c)(a-b+c)}=\frac{4a}{a^2-(b-c)^2} \\ &= \frac{4a}{2bc(1-\cos A)} \end{aligned}$$

Però

$$ah_a = bc\sin A = 2S \iff \frac{a}{bc}=\frac{\sin A}{h_a},$$

així que si ho portem a (*) resulta

$$\frac{1}{BM}+\frac{1}{CM}=\frac{2\sin A}{h_a(1-\cos A)},$$

que és constant perquè $A$ i $h_a$ ho són.

---

El següent exemple va ser un problema molt bonic proposat el 1997 a Mar del Plata (no en tinc referència del país d'origen). Les tres solucions presentades al Jurat eren molt llargues i bastant complicades. El represeutaut hindú, Shailesh Shirali, va obtenir una solució molt curta, però usava coordenades trilineals (proporcionals a les distàucies d'un punt als costats del triangle de referència), un instrument poc conegut, però que transforma difícils problemes de colinealitat en exercicis d'anul·lació de determinants. No va agradar gaire a la concurrència, com, aparentment, tampoc la solució que jo mateix vaig trobar, i que presento a continuació:

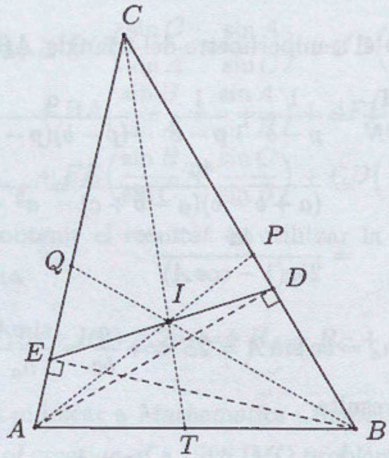
**Problema 11.** En el triangle acutangle $ABC$, $AD$ i $BE$ són altures, i $AP$, $BQ$ bisectrius interiors. Si $I$, $O$ són, respectivament, l'incentre i el circumcentre de $ABC$, demostreu que $D$, $E$, $I$ estan alineats si i només si $P$, $Q$, $O$ estan alineats.

*Solució.* Com que $AD$ i $BE$ són altures,

$$(1) \qquad \frac{BD}{DC}=\frac{c\cos B}{b\cos C}; \qquad \frac{AE}{EC}=\frac{c\cos A}{a\cos C}$$

Com que $AP$ i $BQ$ sóu bisectrius interiors,

$$(2) \qquad \frac{BP}{PC}=\frac{c}{b}; \qquad \frac{AQ}{QC}=\frac{c}{a}.$$




D'altra banda, la condició necessària i suficient per tal que la transversal $EF$ passi per l'incentre $I$ de $ABC$ és

$$\frac{EA}{EC}\,a+\frac{DB}{DC}\,b=c; \tag{3}$$

i la condició necessària i suficient par tal que la transversal $PQ$ passi pel circumcentre $O$ del triangle acutangle $ABC$ és

$$\frac{QA}{QC}\sin 2A+\frac{PB}{PC}\sin 2B=\sin 2C. \tag{4}$$

Substituint (2) a (3) i (1) a (4) s'obté, respectivament,

$$(3) \Longleftrightarrow \frac{\cos A}{\cos C}+\frac{\cos B}{\cos C}=1$$

$$(4) \Longleftrightarrow \text{(usant el teorema del sinus) } \frac{\sin C\sin A\cos A}{\sin A\sin C\cos C}+\frac{\sin C\sin B\cos B}{\sin B\sin C\cos C}=1$$

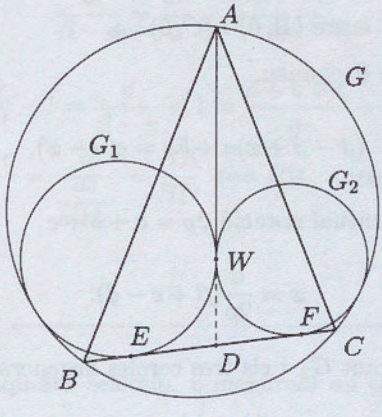
que són clarament equivalents.

*Nota:* (3) i (4) són casos particulars de l'anomenat teorema de la transversal, o teorema de Cristea (1953); per a un tractament d'aquest teorema, vegeu [2].

---

El nostre darrer exemple de geometria plana és el problema proposat per l'Índia el 1992, però que no fou elegit. Quan fou rebutjat, la representant de Colòmbia comentà: "S'ha eliminat el més bell problema de tota aquesta Olimpíada". Hi estic d'acord.

**Problema 12.** Les circumferències $G, G_1, G_2$ estan relacionades de la següent manera: $G_1$ i $G_2$ són tangents exteriors en el punt $W$; totes dues són, a més, tangents interiors a $G$. Els punts $A$, $B$ i $C$ de la circumferència $G$ es determinen de la següent forma: $BC$ és la tangent exterior comuna a $G_1$ i $G_2$; i $WA$ és la tangent comuna interior a $G_1$ i $G_2$, de manera que $W$ i $A$ estan en un mateix costat de la recta $BC$.
Demostreu que $W$ és l'incentre de $ABC$.




$$BE = x$$
$$ED = \beta - x$$
$$DF = \gamma - x$$
$$FC = y$$
$$AD = d$$

*Solució (oficial).* Sigui $D$ el punt de tall de $WA$ amb $BC$ i siguin $E$, $F$ els punts on $G_1$ i $G_2$ són tangents a $BC$. Definim les longituds $x$, $y$, $\beta$, $\gamma$, $d$, així:

$$x = BE,\ y = CF,\ \beta = BD,\ \gamma = CD,\ d = AD;$$

aleshores es té

$$DE = \beta - x, \quad DF = \gamma - y$$

i donat que $DE = DW = DF$, és $\beta - x = \gamma - y$. A més, $AW = d - \beta + x = d - \gamma + y$. Considerarem el sistema de 4 circumferències:

de centre $A$ i radi 0;

$G_1$;

de centre $B$ i radi 0;

de centre $C$ i radio 0.

Aquests quatre cercles són tangents a $G$; els considerarem interiors i aplicarem el teorema generalitzat de Ptolomeu (o de Casey) entre les longituds de les tangents comunes exteriors, que són :

$$\text{entre } (A,0) \text{ i } G_1 : d-\beta+x$$

$$\text{entre } (A,0) \text{ i } (B,0) : c$$

$$\text{entre } (A,0) \text{ i } (C,0) : b$$

$$\text{entre } G_1 \text{ i } (B,0) : x$$

$$\text{entre } G_1 \text{ i } (C,0) : a-x$$

$$\text{entre } (B,0) \text{ i } (C,0) : a.$$

per tant, segons la relació de Ptolomeu,

$$(d-\beta+x)a+bx=c(a-x),$$

que es pot escriure, amb l'habitual notació $2p=a+b+c$,

(1) $$x=\frac{a}{2p}(\beta+c-d).$$

De manera anàloga, considerant $G_2$ i els tres cercles degenerats anteriors, s'arriba a

(2) $$y=\frac{a}{2p}(\gamma+b-d)$$

Com que $DE=DW=DF$, usant (1) i (2), podem escriure

$$\beta-\frac{a}{2p}(\beta+c-d)=\gamma-\frac{a}{2p}(\gamma+b-d),$$

o bé

$$(b+c)\beta-ac=(b+c)\gamma-ab \iff (b+c)(\beta-\gamma)=a(c-b).$$

Com que $\beta+\gamma=a$, aquesta última expressió dóna

$$(b+c)(\beta-\gamma)=(\beta+\gamma)(c-b),$$

que se simplifica fins a arribar a

$$c\gamma=\beta b \iff \frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC} \iff AD \text{ bisectriu de } \widehat{BAC}.$$

Per a completar la solució del problema hem de provar que $BW$ és una altra bisectriu; ho farem en el triangle $ABD$ perquè $AD$ és tangent a $G_1$ i $G_2$ i així no cal buscar expressions per als segments determinats per $BW$ sobre $CA$.

Pel teorema de la bisectriu,

$$\beta = \frac{ac}{b+c}; \quad \gamma = \frac{ab}{b+c},$$

d'on

$$\beta - x = \frac{ad}{2p};$$

i per tant,

$$\frac{d}{\beta - x} = \frac{2p}{a} = \frac{a+b+c}{a},$$

i aleshores

$$\frac{AW}{DW} = \frac{AD}{DW} - 1 = \frac{d}{\beta - x} - 1 = \frac{a+b+c}{a} - 1$$
$$= \frac{b+c}{a} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{BA}{BD} \Longleftrightarrow BW \text{ bisectriu de } \widehat{ABC}$$

La solució és completa.

---

Com a últim problema d'aquesta selecció, n'inclorem un de Geometria de l'espai amb desigualtats i matemàtica discreta, una combinació que va resultar "explosiva" per a molts participants a la IMO de 1992 a Moscou, on va ser presentat per Itàlia.

**Problema 13.** Sigui $S$ un conjunt finit de punts en l'espai tridimensional, amb el sistema de coordenades cartesianes. Siguin $S_x$, $S_y$, $S_z$ els conjunts formats per les projeccions ortogonals dels punts de $S$ sobre els plans $yz$, $zx$, $xy$, respectivament.
Demostreu que $|S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z| \geq |S|^2$, on $|A|$ representa el nombre d'elements del conjunt finit $A$.

*Solució (oficial).* Posem $a = |S_x|$, $b = |S_y|$, $c = |S_z|$. Utilitzarem la inducció sobre $|S|$.
Si el conjunt té un únic punt, la proposició és veritat: $1 \times 1 \times 1 \geq 1^2$.
Suposem que la proposició és certa per a $|S| < N$.
Considerem un conjunt $S$ tal que $|S| = N$.
És clar que existeix un pla paral·lel a un dels plans de coordenades, que no conté punts de $S$ i que divideix $S$ en dos subconjunts no buits, $S_1$, $S_2$, de manera que

$$N = |S_1| + |S_2|, \quad |S_1| < N, \quad |S_2| < N.$$

per la hipòtesi d'inducció, se compleixen les desigualtats

$$a_1 b_1 c_1 \geq |S_1|^2, \quad a_2 b_2 c_2 \geq |S_2|^2.$$

Podem suposar, sense perdre generalitat, que el pla divisor es paral·lel al pla $xy$. Aleshores

$$a_1 + a_2 = a, \quad b_1 + b_2 = b, \quad c \geq c_1, \; c \geq c_2.$$

Per la desigualtat de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} abc &= c(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \geq \\ &\geq c\left(\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2}\right)^2 = \\ &= \left(\sqrt{a_1 b_1}\sqrt{c} + \sqrt{a_2 b_2}\sqrt{c}\right)^2 \geq \\ &\geq \left(\sqrt{a_1 b_1 c_1} + \sqrt{a_2 b_2 c_2}\right)^2 \geq \\ &\geq \left(|S_1| + |S_2|\right)^2 = |S|^2, \end{aligned}$$

i hem acabat.

## BIBLIOGRAFIA

[1] BELLOT, F. i LÓPEZ, M. A.,*Cien problemes de Matemáticas: Combinatoria, Álgebra, Geometría.* ICE de la U. de Valladolid, 1994.

[2] BELLOT, F., *El teorema de las transversales y algunas consecuencias*; SIPROMA, núm. 1, juny 1997. O.E.I.